

SOMMARIO

PREMESSA	2
ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI	2
TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO O DI SHANNON (O DI NYQUIST).....	2
Esempio 1	3
Esempio 2	3
FORMA NUMERICA DEL FILTRO PASSA BASSO (FILTRO a).....	3
RELAZIONE FRA PARAMETRI TEMPO CONTINUO E TEMPO DISCRETO.....	5
FORMA NUMERICA DEL FILTRO PASSA ALTO	6
FORMA NUMERICA DELL'INTEGRATORE	10
FORMA NUMERICA DEL DERIVATORE.....	11
SISTEMA DEL SECONDO ORDINE	12
FORMA NUMERICA DI UN REGOLATORE PID.....	13
Esempio 3	13
Esempio 4	14
Esempio 5	14
BIBLIOGRAFIA.....	14

Introduzione al Filtraggio Numerico

prof. Cleto Azzani
IPSIA Moretto Brescia
Ottobre 1995

Premessa

Lo sviluppo crescente che i sistemi di elaborazione-dati hanno avuto negli anni recenti, il potenziamento della velocità di elaborazione e delle prestazioni generali rende oggi possibile l'estensione dell'impiego di sistemi computerizzati o microcomputerizzati in campi tradizionalmente occupati da sistemi analogici (ritenuti insostituibili).

Un settore verso il quale si sono orientati recentemente gli studi di formalizzazione matematica è rappresentato dalla progettazione di software dedicato a funzioni di filtraggio realizzate in forma digitale o numerica. Si tratta in altri termini di riprodurre a livello software il modello matematico di circuiti di filtro di tipo analogico quali filtri di tipo passa basso, passa alto, passa banda, o elimina banda.

Questa breve nota vuole illustrare attraverso alcuni esempi concreti tale possibilità senza pretese né di esaurire l'argomento e nemmeno di affrontarlo con il dovuto rigore matematico.

I modelli matematici proposti sono stati puntualmente verificati attraverso l'uso di fogli elettronici redatti in ambiente Lotus 123 sia predisponendo modelli di simulazione numerica in ambiente MathCad come dimostra la documentazione grafica presentata.

Si darà per scontato il concetto di funzione di trasferimento, il concetto di Trasformata di Laplace e le sue proprietà formali.

NB: Verranno usate le lettere maiuscole per indicare grandezze che sono funzioni della variabile complessa s X, Y, Z anziché $X(s), Y(s), Z(s)$; mentre si useranno lettere minuscole per indicare funzioni della variabile t : x, y, z anziché $x(t), y(t), z(t)$.

Elaborazione numerica dei segnali

Il trattamento di segnali analogici attraverso l'uso di un sistema di elaborazione-dati di tipo numerico presuppone l'uso di apposite strutture di interfaccia denominate ADC (Analog to Digital Converter - Convertitore Analogico-Digitale) oppure DAC (Digital to Analog Converter - Convertitore Digitale-Analogico).

Una interfaccia ADC trasforma un segnale analogico rappresentato da una tensione variabile nel tempo in un numero N che esprime (a meno di una costante di proporzionalità) la misura della tensione effettuata nell'istante di conversione. Il convertitore ADC impiega un certo tempo per effettuare la misura (tempo di conversione) per cui il segnale continuo di ingresso verrà di fatto "campionato" ossia verrà misurato ad intervalli regolari di tempo (tempo di campionamento). È essenziale che il campionamento venga effettuato in modo tale da non perdere l'informazione contenuta nel segnale di ingresso; ciò implica che si debbano rispettare alcune condizioni fondamentali.

Teorema del campionamento o di Shannon (o di Nyquist)

Un segnale $s(t)$ viene campionato ad intervalli regolari di tempo T da un campionatore ideale; viene generato perciò un nuovo segnale

$$S_k = s(kT) \quad -\infty < k < +\infty \quad 3.1$$

S_k rappresenta la versione "discreta" di $s(t)$ ed è definita solo per valori della variabile k interi (valori che identificano l'istante di campionamento).

Shannon (Nyquist) ha dimostrato che è possibile affidare a S_k tutta l'informazione contenuta in $s(t)$ in altri termini è possibile costruire un circuito capace di ricostruire il segnale continuo $s(t)$ a partire dai campioni S_k purché siano verificate le due condizioni :

- a) $s(t)$ sia un segnale a Banda B rigorosamente limitata
- b) la frequenza di campionamento f_c sia maggiore o uguale a $2B$.

Esempio 1

Un segnale telefonico occupa una banda di 4KHz; se si desidera procedere al campionamento del segnale e mantenere la possibilità di ricostruire puntualmente l'informazione a partire dai campioni si dovrà campionare a frequenza f_c pari a 8KHz.

Esempio 2

Un segnale analogico 0-10V banda 0-20KHz deve essere campionato e convertito in digitale (convertitore ADC ad 8 bit); calcolare :

- a) il periodo T di campionamento,
- b) la sensibilità o risoluzione del convertitore ADC (minimo livello misurabile)

Soluzione :

a) per il T di Shannon $f_c = 40\text{KHz}$ (40.000 sample/sec.) quindi $T = 1/f = 25 \mu\text{s}$.

b) essendo il convertitore a 8 bit, 256 sono i possibili livelli di quantizzazione per cui il minimo livello percettibile è pari a:

$$V_{min} = \frac{10}{256} \cong 39\text{mV}$$

Forma numerica del Filtro Passa Basso (filtro a)

Com'è noto la funzione di trasferimento di un filtro passa basso (circuito RC oppure LR ecc.) è data dalla seguente espressione:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + s \cdot \tau} \quad 3.2$$

ove τ rappresenta la costante di tempo del circuito (RC oppure L/R) e si misura in sec. Risulta immediatamente dalla 3.2 :

$$Y \cdot (1 + s\tau) = X \quad 3.3$$

$$Y + s\tau \cdot Y = X \quad 3.4$$

Convertendo l'espressione 3.4 nella equivalente nel dominio del tempo risulta:

$$y + \tau \frac{dy}{dt} = x \quad 3.5$$

passando ora ai campioni $Y(k)$ ed $X(k)$ dell'uscita $y(t)$ e dell'ingresso $x(t)$ risulta :

$$Y(k) + \tau \frac{Y(k) - Y(k-1)}{T_c} = X(k) \quad 3.6$$

da cui risulta raccogliendo $Y(k)$ a primo membro:

$$Y(k) = \frac{X(k)}{1 + \frac{\tau}{T_c}} + \frac{Y(k-1) \frac{\tau}{T_c}}{1 + \frac{\tau}{T_c}} \quad 3.7$$

da cui immediatamente discende la 3.8 :

$$Y(k) = \alpha \cdot X(k) + (1 - \alpha)Y(k-1) \quad 3.8$$

avendo posto :

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_c}} \quad 3.9$$

per cui risulta :

$$1 - \alpha = \frac{\frac{\tau}{T_c}}{1 + \frac{\tau}{T_c}} \quad 3.10$$

L'espressione 3.8 rappresenta pertanto la versione discretizzata della 3.2; sono d'obbligo alcune considerazioni.

Il valore attuale assunto dall'uscita $Y(k)$ dipende dal valore attuale assunto dall'ingresso $X(k)$, per la presenza del termine $\alpha X(k)$, e dal valore assunto in precedenza dall'uscita $Y(k-1)$, per la presenza del termine $(1-\alpha)Y(k-1)$. Il parametro α può assumere valori compresi fra 0 ed 1 in corrispondenza a valori del termine τ/T_c rispettivamente compresi fra ∞ e 0.

a) $\tau T = 0$ indica costante di tempo nulla (o tempo di campionamento infinito); in tal caso risulta $\alpha = 1$ e dalla 3.8 si ricava che:

$$Y(k) = X(k) \quad 3.11$$

l'uscita attuale $Y(k)$ dipende unicamente dall'ingresso $X(k)$ nel medesimo istante k .

b) $\tau T = \infty$ indica costante di tempo infinita in quanto T non può assumere valori nulli; in tal caso risulta $\alpha = 0$ e dalla 3.8 si ricava che:

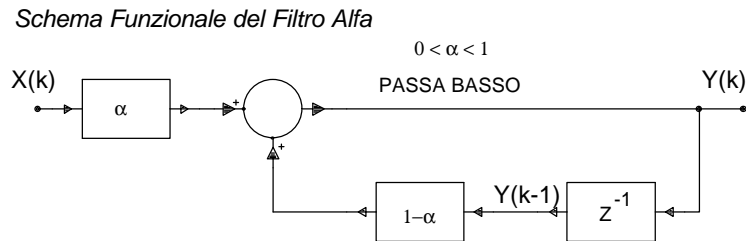
$$Y(k) = Y(k-1) \quad 3.12$$

l'uscita attuale $Y(k)$ dipende unicamente dal valore assunto in passato dall'uscita, ma non dall'ingresso $X(k)$.

É importante mettere in relazione il comportamento del filtro nel dominio di f con la relazione 3.8 che ne descrive il funzionamento nel dominio del tempo (su sistemi a tempo discreto). É evidente che la costante di tempo τ determina nel dominio della f la frequenza di taglio superiore essendo come é noto:

$$f_{TS} = \frac{1}{2\pi\tau} \quad 3.13$$

per ottenere un filtro con f_{TS} elevata bisogna ridurre τ e quindi incrementare il valore del parametro α come indicato dall'analisi della 3.9; frequenza di taglio elevata significa sistema che risponde meglio alle frequenze elevate, incremento di α significa uscita che dipende maggiormente dall'ingresso e in modo minore dai valori assunti dall'uscita in istanti precedenti ossia riduzione dell'inerzia del sistema. Interessante é pure lo schema a blocchi ove é riprodotta l'interpretazione funzionale della 3.8.



Relazione fra parametri tempo continuo e tempo discreto

Conviene porre in relazione fra loro le grandezze che caratterizzano il comportamento di un filtro passa basso in regime continuo con le corrispondenti grandezze numeriche che sono presenti nelle equazioni alle differenze a tempo discreto. Per semplificare al massimo la trattazione, supponiamo che il campionamento dei segnali di ingresso al filtro siano sempre effettuati in modo da soddisfare ampiamente il teorema di Shannon (Nyquist) supponiamo inoltre di considerare segnali periodici per cui indicheremo con N il numero di campioni (samples) nel periodo T. Detto T_c il tempo di campionamento risulta ovviamente:

$$N = \frac{T}{T_c} \quad T_c = \frac{T}{N} \quad 3.131$$

alla variabile continua t, in ambito numerico, si sostituisce la variabile discreta k data dalla relazione:

$$t = k \cdot T_c = k \cdot \frac{T}{N} \quad 3.132$$

alla costante di tempo τ di un filtro é possibile sostituire un equivalente parametro numerico m cosi definito:

$$\tau = m \cdot T_c = m \frac{T}{N} \quad 3.133$$

Volendo stabilire un parallelismo fra la risposta di un filtro in regime continuo e quella di un filtro digitale si può ad esempio ricavare la costante di tempo τ dalla relazione 3.9.

$$\tau = T_c \frac{1 - \alpha}{\alpha} = m T_c \quad 3.134$$

da cui :

$$m = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad \alpha = \frac{1}{m + 1} \quad 1 - \alpha = \frac{m}{m + 1} \quad 3.135$$

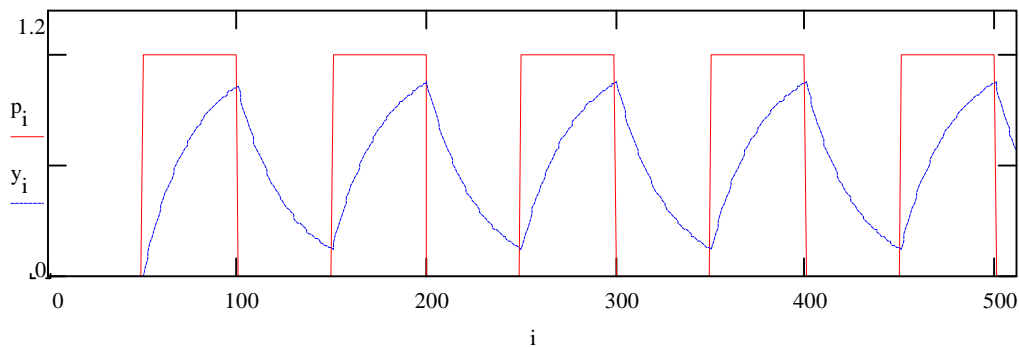
É evidente che per modificare in un filtro digitale la sua "costante di tempo numerica m" si dovrà agire sul parametro α così come indicato nelle relazioni sopra riportate.

Nei sistemi tempo continuo del primo ordine il rapporto t/τ determina il tipo di risposta in transitorio come riportato in tabella nel caso di ingresso a gradino. Il rapporto k/m determina un analogo comportamento nei sistemi a tempo discreto infatti risulta:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{k \cdot T_c}{m \cdot T_c} = \frac{k}{m} \quad 3.136$$

t/τ	$\exp(-t/\tau)$	$1 - \exp(-t/\tau)$
1	0.368	0.632
2	0.135	0.865
3	0.049	0.951
4	0.018	0.982
5	0.007	0.993

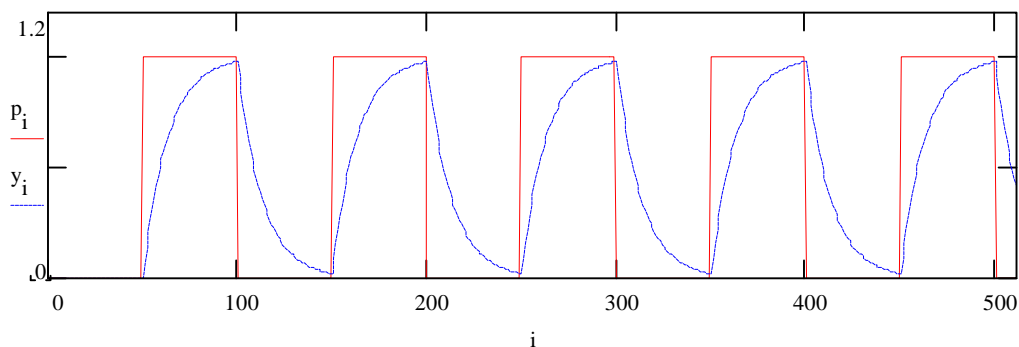
In figura é riportato un esempio di simulazione in ambiente Math-Cad di un filtro α del primo ordine stimolato in ingresso da un segnale numerico periodico (onda quadra) campionato con 100 samples al



$$y_{100} = 0.859 \quad \alpha = 0.038 \quad m = 25$$

periodo. Volendo simulare la condizione in cui in regime continuo si ha $t/\tau = 2$ si deve porre $k/m = 2$ e, poiché la durata temporale del transitorio dell'ingresso numerico é pari a $k=50$ dovrà perciò essere $m=k/2$ da cui poi $\alpha=0.038$. Si noti che l'ampiezza del campione $y(100)=0.859$; tale valore concorda con la risposta a fine transitorio nel caso si consideri un filtro del primo ordine funzionante in regime continuo.

Nell'esempio seguente si é modificato il valore del parametro α per simulare la situazione equivalente, in regime continuo, alla condizione $t/\tau = 4$ da cui $m=12.5$ e quindi $\alpha=0.074$.



$$y_{100} = 0.979 \quad \alpha = 0.074 \quad m = 12.5$$

Forma numerica del Filtro Passa Alto

Com'é noto, la funzione di trasferimento di un filtro passa alto (circuito CR, oppure RL, ecc.) é data dalla seguente espressione:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s\tau}{1 + s \cdot \tau} \quad 3.14$$

ove τ rappresenta la costante di tempo del sistema. Risulta immediatamente dalla 3.14 :

$$Y \cdot (1 + s\tau) = Xs\tau \quad 3.15$$

$$Y + s\tau \cdot Y = Xs\tau \quad 3.16$$

$$y + \tau \frac{dy}{dt} = \tau \frac{dx}{dt} \quad 3.17$$

passando ora dalla rappresentazione in tempo continuo a quella a tempo discreto risulta:

$$Y(k) + \tau \frac{Y(k) - Y(k-1)}{T_c} = \tau \frac{X(k) - X(k-1)}{T_c} \quad 3.18$$

da cui risulta raccogliendo $Y(k)$ a primo membro:

$$Y(k) = \frac{\frac{\tau}{T_c}}{1 + \frac{\tau}{T_c}} [X(k) - X(k-1) + Y(k-1)] \quad 3.19$$

da cui immediatamente discende (tenuto conto delle posizioni fatte nella 3.9):

$$Y(k) = (1 - \alpha) [X(k) - X(k-1) + Y(k-1)] \quad 3.20$$

Il parametro α può assumere valori compresi fra 0 ed 1 in corrispondenza a valori del termine τ/T rispettivamente compresi fra ∞ e 0.

a) $t/T = 0$ indica costante di tempo nulla; in tal caso risulta $\alpha = 1$ e dalla 3.20 si ricava che:

$$Y(k) = 0 \quad 3.21$$

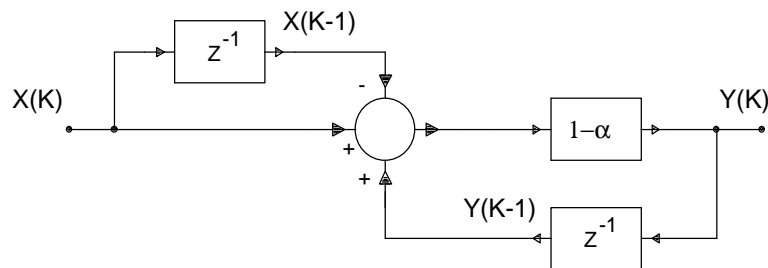
b) $t/T = \infty$ indica costante di tempo infinita; in tal caso risulta $\alpha = 0$ e dalla 3.20 si ricava che:

$$Y(k) = X(k) - X(k-1) + Y(k-1) \quad 3.22$$

l'uscita attuale $Y(k)$ dipende dal valore assunto in passato dall'uscita, e dalle variazioni subite dall'ingresso $X(k)$.

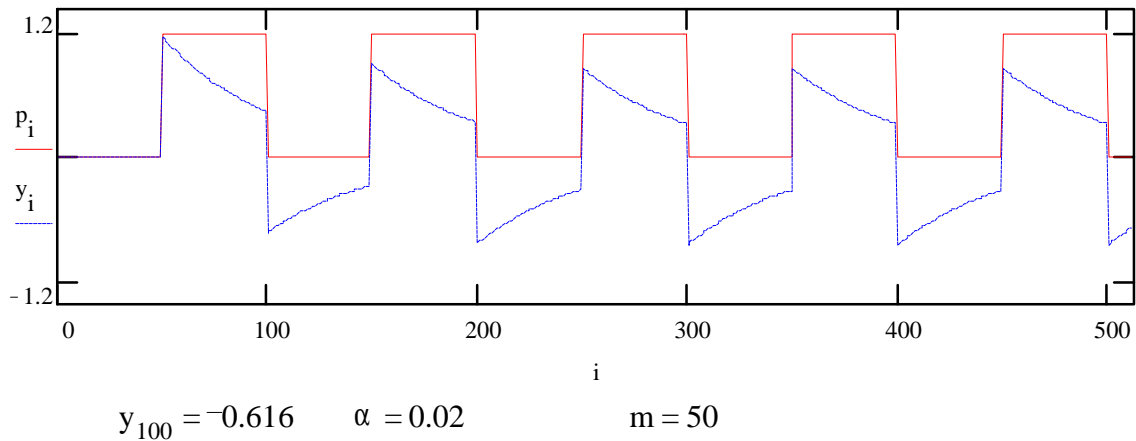
È facile constatare che, essendo solitamente $0 < \alpha < 1$, nel caso in cui l'ingresso $X(k)$ non vari, l'uscita $Y(k)$ tende progressivamente a zero (tipica caratteristica passa-alto).

Schema Funzionale del Filtro Passa Alto



Lo schema a blocchi di figura propone una interessante interpretazione della equazione che descrive il funzionamento di un sistema passa alto del primo ordine di tipo numerico.

In figura che segue è riportato un esempio di simulazione in ambiente Math-Cad di un filtro passa alto α del primo ordine stimolato in ingresso da un segnale numerico periodico (onda quadra) campionato con 100 samples al periodo. La condizione di simulazione è quella determinata dalla condizione $t/\tau = 1$.



Nelle figure che seguono, sono riportati alcuni esempi di simulazione del comportamento di filtri numerici passa alto e passa basso (con $\alpha = 0,091$) con segnale di ingresso triangolare nel caso rappresentato in fig. 1 e con $\alpha = 0,062$ e segnale di ingresso rettangolare nel caso di fig. 2.

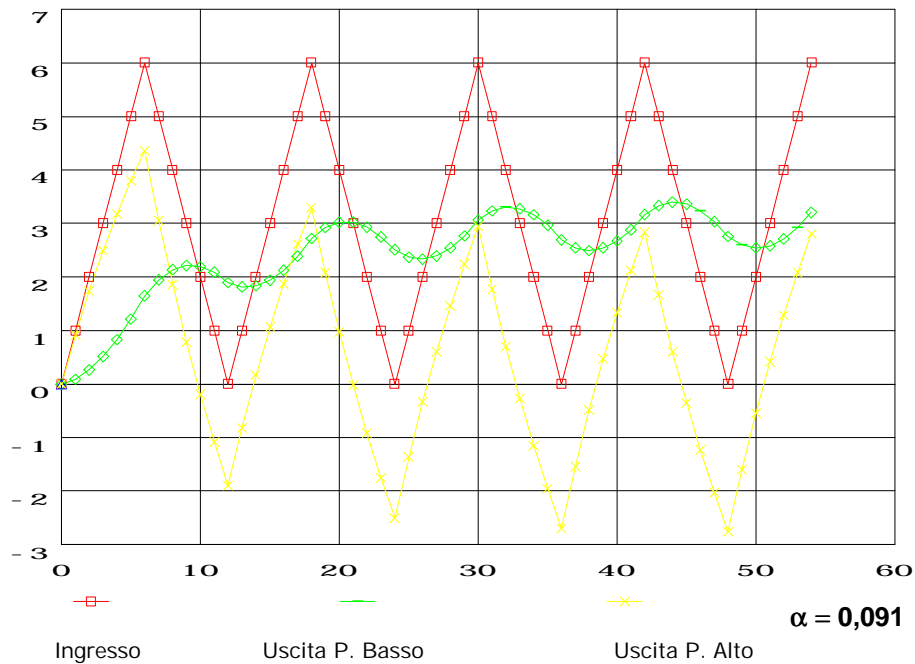


fig. 1 Simulazione in ambiente LOTUS 123 su filtri numerici Passa Alto e Passa Basso con segnale di ingresso di tipo triangolare (12 campioni/periodo).

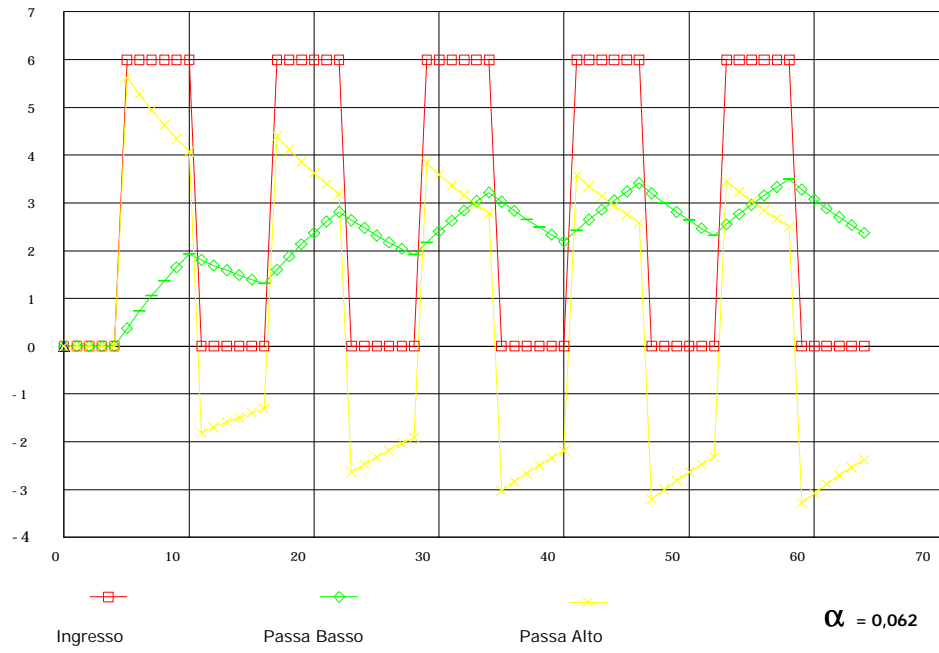


fig. 2 Simulazione in ambiente LOTUS 123 su filtri numerici P.Alto e P.Basso con ingresso rettangolare (12 campioni/periodo).

Forma Numerica dell'Integratore

Com'è noto, la funzione di trasferimento di un integratore ideale è data dalla seguente espressione:

$$F(s) = \frac{K_I}{s} \quad 3.23$$

ove K_I rappresenta la costante integrativa del sistema. Risulta immediatamente dalla 3.23 :

$$Y \cdot s = K_I \cdot X \quad 3.24$$

Convertendo l'espressione 3.24 nella equivalente nel dominio del tempo risulta:

$$\frac{dy}{dt} = K_I \cdot x \quad 3.25$$

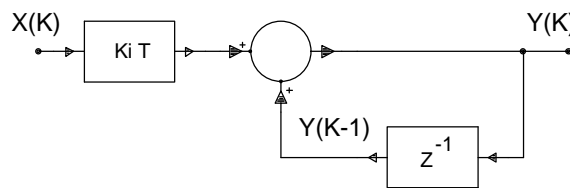
passando ora dalla rappresentazione in tempo continuo a quella a tempo discreto risulta:

$$\frac{Y(k) - Y(k-1)}{T_C} = K_I \cdot X(k) \quad 3.26$$

da cui risulta raccogliendo $Y(k)$ a primo membro:

$$Y(k) = K_I \cdot T_C X(k) + Y(k-1) \quad 3.27$$

Schema Funzionale dell' Integratore



Nella figura che segue, viene riportato un esempio di simulazione del comportamento di un integratore numerico (con $K_I T_C = 0.25$) con ingresso quadro campionato con 12 sample al periodo.

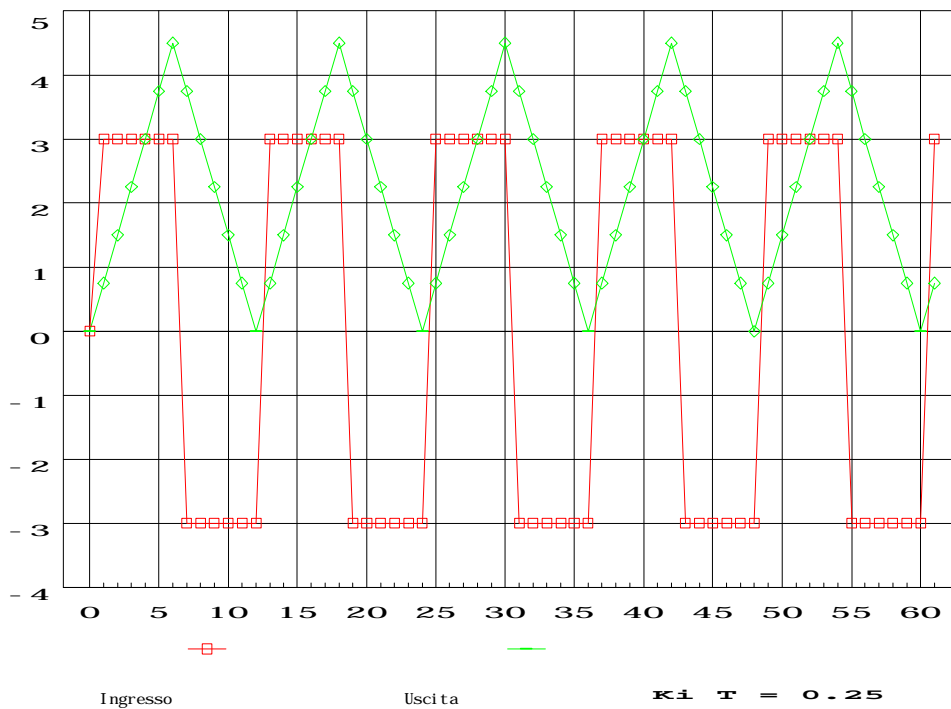


fig. 3 Simulazione in ambiente LOTUS 123 su filtri numerico integratore con ingresso rettangolare (12 campioni/periodo).

Forma Numerica del Derivatore

Com'è noto, la funzione di trasferimento di un derivatore ideale è data dalla seguente espressione:

$$F(s) = K_D \cdot s \quad 3.28$$

ove K_D rappresenta la costante derivativa del sistema. Risulta immediatamente dalla 3.28 :

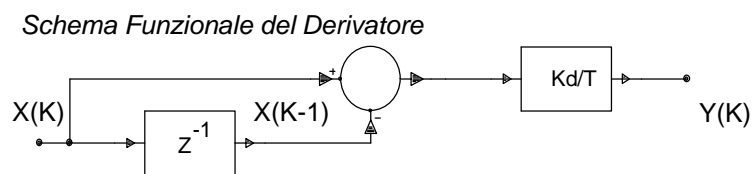
$$Y = K_D \cdot s \cdot X \quad 3.29$$

Convertendo l'espressione 3.29 nella equivalente nel dominio del tempo risulta:

$$y = K_D \frac{dx}{dt} \quad 3.30$$

passando ora dalla rappresentazione in tempo continuo a quella a tempo discreto risulta:

$$Y(k) = \frac{K_D}{T_c} \cdot [X(k) - X(k-1)] \quad 3.31$$



Nella figura che segue, viene riportato un esempio di simulazione del comportamento di un derivatore numerico (con $K_D/T_c=4$) con ingresso triangolare campionato con 12 sample al periodo.

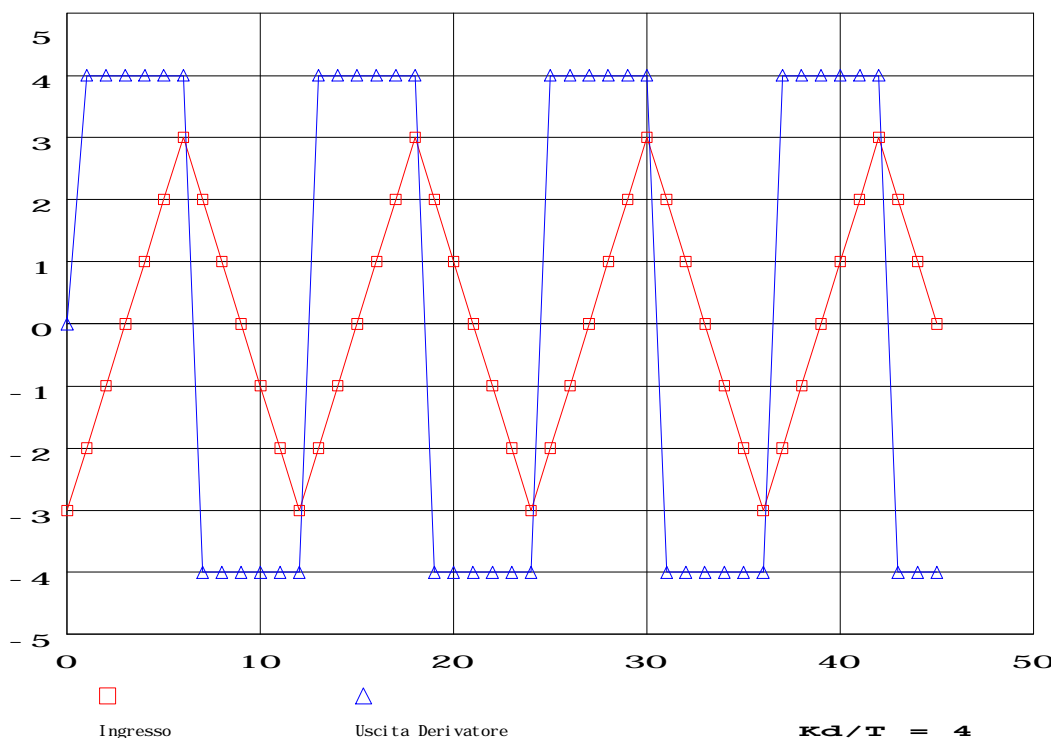


fig. 4 Simulazione in ambiente LOTUS 123 su filtro numerico derivatore con ingresso triangolare (12 campioni/periodo).

Sistema del secondo ordine

Com'è noto, la funzione di trasferimento di un sistema del 2° ordine è data dalla seguente espressione:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad 3.33$$

ove ω_n rappresenta la pulsazione naturale di oscillazione del sistema che nel caso di un circuito RLC assume la forma:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad 3.34$$

e ξ rappresenta il coefficiente di smorzamento del sistema che nel caso di un circuito RLC assume la forma :

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad 3.35$$

Risulta immediatamente dalla 3.33 :

$$s^2 Y + 2\xi\omega_n s Y + \omega_n^2 Y = \omega_n^2 X \quad 3.36$$

Convertendo l'espressione 3.36 nella equivalente nel dominio del tempo risulta:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 x \quad 3.37$$

passando ora dalla rappresentazione in tempo continuo a quella a tempo discreto risulta:

$$\frac{Y(k) - 2Y(k-1) + Y(k-2)}{T_C^2} + 2\xi\omega_n \frac{Y(k) - Y(k-1)}{T_C} + \omega_n^2 Y(k) = \omega_n^2 X(k) \quad 3.38$$

raccogliendo $Y(k)$ a primo membro si ottiene:

$$Y(k) = C_1 \cdot X(k) + C_2 \cdot Y(k-1) + C_3 \cdot Y(k-2) \quad 3.39$$

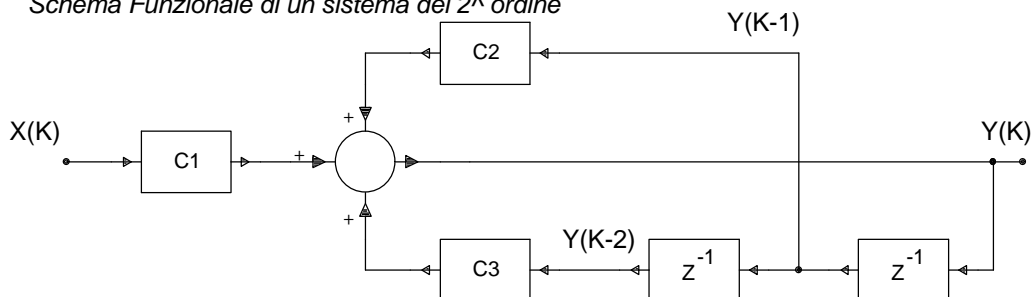
ove:

$$C_1 = \frac{\omega_n^2 T_C^2}{\omega_n^2 T_C^2 + 2\xi\omega_n T_C + 1} \quad 3.40$$

$$C_2 = \frac{2\xi\omega_n T_C + 2}{\omega_n^2 T_C^2 + 2\xi\omega_n T_C + 1} \quad 3.41$$

$$C_3 = \frac{-1}{\omega_n^2 T_C^2 + 2\xi\omega_n T_C + 1} \quad 3.42$$

Schema Funzionale di un sistema del 2° ordine



Forma Numerica di un regolatore PID

Com'è noto, la funzione di trasferimento di un regolatore PID è data dalla seguente espressione:

$$F(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \quad 3.43$$

ove K_p , K_d , K_i rappresentano i coefficienti da cui dipende rispettivamente l'azione proporzionale, quella derivativa e quella integrale. Risulta immediatamente dalla 3.43 :

$$sY = K_D s^2 X + K_P sX + K_I \cdot X \quad 3.44$$

Convertendo l'espressione 3.44 nella equivalente nel dominio del tempo risulta:

$$\frac{dy}{dt} = K_D \frac{d^2 x}{dt^2} + K_P \frac{dx}{dt} + K_I \cdot x \quad 3.45$$

passando ora dalla rappresentazione in tempo continuo a quella a tempo discreto risulta:

$$\frac{Y(k) - Y(k-1)}{T_C} = K_D \frac{X(k) - 2X(k-1) + X(k-2)}{T_C^2} + K_P \frac{X(k) - X(k-1)}{T_C} + K_I \cdot X(k) \quad 3.46$$

raccogliendo $Y(k)$ a primo membro si ottiene:

$$Y(k) = Y(k-1) + C_1 \cdot X(k) + C_2 \cdot X(k-1) + C_3 \cdot X(k-2) \quad 3.47$$

ove :

$$C_1 = \frac{K_I \cdot T_C^2 + K_P \cdot T_C + K_D}{T_C} \quad 3.48$$

$$C_2 = \frac{-K_P \cdot T_C - 2K_D}{T_C} \quad 3.49$$

$$C_3 = \frac{K_D}{T_C} \quad 3.50$$

Esempio 3

Un segnale analogico 0-5V banda 0-5KHz viene campionato a 100 KHz; determinare il parametro α di un filtro numerico del primo ordine che realizzi una frequenza di taglio a 1 KHz.

Soluzione :

Dalla frequenza di taglio si calcola la costante di tempo:

$$\tau = \frac{1}{2\pi f_{TS}} = 159.15 \mu s$$

Si determina m dalla relazione:

$$m = \frac{\tau}{T_C} = 15.92$$

Si determina α dalla relazione:

$$\alpha = \frac{1}{m+1} = 0.059$$

Esempio 4

Esprimere l'equazione del filtro passa basso α utilizzando l'espressione della "costante di tempo numerica".

Sostituendo nella espressione 3.8

$$Y(k) = \alpha \cdot X(k) + (1 - \alpha)Y(k - 1)$$

i valori dei parametri α e $1 - \alpha$ dati dalle 3.135

$$\alpha = \frac{1}{m + 1} \quad 1 - \alpha = \frac{m}{m + 1}$$

si ottiene :

$$Y(k) = \frac{1}{1 + m} X(k) + \frac{m}{1 + m} Y(k - 1)$$

Esempio 5

Esprimere l'equazione del filtro passa alto utilizzando l'espressione della "costante di tempo numerica".

Sostituendo nella espressione 3.20

$$Y(k) = (1 - \alpha)[X(k) - X(k - 1) + Y(k - 1)]$$

i valori dei parametri α e $1 - \alpha$ dati dalle 3.135 si ottiene :

$$Y(k) = \frac{m}{1 + m} [X(k) - X(k - 1) + Y(k - 1)]$$

Bibliografia

-G. Cariolaro	TEORIA DEI SEGNALI	CLEUP Padova 1970 Cap. 3
-A. Papoulis	THE FOURIER INTEGRAL	Mc Graw Hill 1962 Cap. 3
Oppenheim Shaffer	Elaborazione Numerica dei segnali	Franco Angeli

Software di supporto

Mathcad 4.0	MathSoft Inc.	USA
Lotus 123 3.0	Lotus Corporation	USA